

6. PUISSANCES

Définition :

La puissance nième du nombre a est le produit de n facteurs égaux à a .

a est la **base** et n est l'**exposant** de la puissance.

On note: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \cdot a$ (n facteurs)

Exemple :

$(-5)^2 = 25$ est une **puissance**. 2 est l'**exposant**. (-5) est la **base**.

Puissance de 10 :

$10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{n \text{ fois}} = \underbrace{100\dots0}_{n \text{ zéros}}$	$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00\dots01}_{n \text{ zéros}}$
$10^0 = 1$ $10^1 = 10$ $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\ 000$ $10^6 = 1\ 000\ 000 = 1 \text{ million}$ $10^9 = 1\ 000\ 000\ 000 = 1 \text{ milliard}$	$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1 = 1 \text{ dixième}$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01 = 1 \text{ centième}$ $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001 = 1 \text{ millième}$ $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0,000\ 001 = 1 \text{ millionième}$

Signe d'une puissance

Une puissance d'un nombre réel positif est toujours positive.

Exemple : $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Une puissance d'un nombre réel négatif est positive si son exposant est pair.

Une puissance d'un nombre réel négatif est négative si son exposant est impair.

Exemples : $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = (+9)$

$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-27)$

Par convention

$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
		Un nombre élevé à une puissance négative est l'inverse de ce nombre élevé à la même puissance positive	
$3^0 = 1$ $(-5,75)^0 = 1$ $\left(\frac{7}{5}\right)^0 = 1$ $x^0 = 1$	$3^1 = 3$ $(-5,75)^1 = -5,75$ $\left(\frac{7}{5}\right)^1 = \frac{7}{5}$ $x^1 = x$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$ $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$ $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Règles (pour m et n entiers relatifs)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Pour multiplier deux ou plusieurs puissances d'une même base, on additionne les exposants.	Pour trouver le résultat d'une puissance de puissance, il suffit de multiplier les deux exposants.	Pour diviser deux ou plusieurs puissances d'une même base, on soustrait les exposants.
$A = 2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$ $A = 2^7$ $B = 10^3 \cdot 10^{-4} = 10^{3-4}$ $B = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ $C = x^2 \cdot x^3 = x^{2+3}$ $C = x^5$ $D = (-5)^2 \cdot (-5)^3 \cdot (-5)^4$ $D = (-5)^{2+3+4}$ $D = (-5)^9$	$D = (2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4}$ $D = 2^{12}$ $E = (10^3)^{-4} = 10^{3 \cdot (-4)}$ $E = 10^{-12} = \frac{1}{10^{12}}$ $F = (x^2)^3 = x^{2 \cdot 3}$ $F = x^6$ $G = [(-3)^2]^3$ $G = (-3)^{2 \cdot 3}$ $G = (-3)^6$	$H = \frac{2^3}{2^7} = 2^{3-7}$ $H = 2^{-4} = \frac{1}{2^4}$ $I = \frac{10^3}{10^{-2}} = 10^{3-(-2)} = 10^{3+2}$ $I = 10^5 = 100000$ $J = \frac{x^3}{x} = \frac{x^3}{x^1} = x^{3-1}$ $J = x^2$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
La puissance d'un produit est égale au produit des puissances	
$J = (5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2 = 25 \cdot 9$ $J = 225$ $K = 5^5 \cdot 2^5 = (5 \cdot 2)^5 = 10^5$ $K = 100000$ $L = (3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$ $M = (-2x)^3 = (-2)^3 \cdot x^3 = -8x^3$	$N = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$ $N = \frac{4}{9}$ $P = \left(\frac{10}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{3^2}{10^2}$ $P = \frac{9}{100} = 0,09$ $Q = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4^2}$ $Q = \frac{x^2}{16} = \frac{1}{16}x^2$

JE M'ENTRAÎNE

Exercice 6.1 Réduis les expressions suivantes. N'hésite pas à récrire les divisions sous forme de fractions !

a) $10^4 \cdot 10^{-4} = 10^0 = 1$

b) $(10^3)^5 = 10^{15}$

c) $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$

d) $(10^4)^5 = 10^{20}$

e) $10^5 \cdot 10^3 = 10^8$

f) $(10^4)^4 = 10^{16}$

g) $10^4 \cdot 10^3 = 10^7$

h) $(10^2)^5 = 10^{10}$

i) $10^5 \cdot 10^{-3} = 10^2$

Exercice 6.2 Réduis les expressions suivantes. N'hésite pas à récrire les divisions sous forme de fractions !

a) $(10^5 \cdot 10^{-3}) \div 10^{-1} = 10^3$

b) $10^4 \div (10^4 \cdot 10^2) = 10^{-2}$

c) $(10^{-2} \cdot 10^2)^1 = 10^0 = 1$

d) $(10^2 \cdot 10^{-4}) \div 10^{-4} = 10^2$

e) $(10^4 \cdot 10^1)^1 = 10^5$

f) $(10^4 \cdot 10^3) \div 10^3 = 10^4$

g) $(10^{-3} \cdot 10^{-5})^3 = 10^{-24}$

h) $(10^1 \cdot 10^2)^4 = 10^{12}$

i) $(10^5 \cdot 10^3)^5 = 10^{40}$

j) $(10^{-2} \cdot 10^{-5})^3 = 10^{-21}$

Exercice 6.3 Réduis les expressions suivantes. N'hésite pas à récrire les divisions sous forme de fractions !

$10^{-2} \div [(10^1)^3 \cdot 10^{-2}] = 10^{-3}$

$[10^2 \cdot (10^1)^2] \div (10^2)^2 = 1$

$10^{-2} \div [(10^{-4})^5 \cdot 10^2] = 10^{16}$

$(10^{-2} \cdot 10^{-2}) \div (10^{-2} \cdot 10^1) = 10^{-3}$

$[10^1 \cdot (10^2)^3] \div (10^2)^4 = 10^{-1}$

$(10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^3) \div (10^4 \cdot 10^1) = 10^3$

$[10^2 \cdot (10^1)^3] \div (10^2)^3 = 10^{-1}$

$(10^{-5} \cdot 10^{-1}) \div (10^{-3} \cdot 10^{-1}) = 10^{-2}$

$(10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^2) \div (10^2 \cdot 10^3) = 10^3$

$(10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^4) \div (10^1 \cdot 10^4) = 10^7$

Exercice 6.4 Réduis les expressions suivantes. N'hésite pas à récrire les divisions sous forme de fractions !

a) $(5^4 \cdot 5^{-1}) \div (5^1 \cdot 5^4) = 5^3 \div 5^5 = 5^{-2}$

b) $10^{-2} \cdot 10^{-1} \div (10^{-3} \cdot 10^3) = 10^{-3} \div 10^0 = 10^{-3}$

c) $[4^4 \cdot (4^4)^3] \div (4^4)^1 = 4^{16} \div 4^4 = 4^{12}$

d) $[4^3 \cdot (4^3)^2] \div (4^5)^4 = 4^9 \div 4^{20} = 4^{-11}$

e) $(2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^5) \div (2^3 \cdot 2^3) = 2^{13} \div 2^6 = 2^7$

f) $(5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^4) \div (5^4 \cdot 5^2) = 5^{11} \div 5^6 = 5^5$

g) $10^{-1} \div [(10^{-1})^1 \cdot 10^4] = 10^{-1} \div 10^3 = 10^{-4}$

h) $2^{-1} \div [(2^4)^1 \cdot 2^4] = 2^{-1} \div 2^8 = 2^{-9}$

Exercice 6.5 Place le signe qui convient : >, < ou =

a) $4^3 = 4^2 \cdot 4$ f) $(-4)^8 = 16^4$

b) $(-3)^3 \cdot (-3)^3 > (-3)^9$ g) $10^2 + 10 < 10^3$

c) $2^2 \cdot 4^2 = 8^2$ h) $(-5)^3 \cdot (-5)^6 = (-5)^9$

d) $(5 + 7)^2 > 5^2 + 7^2$ i) $5^3 \cdot 5^4 \cdot 5^2 < 125^9$

e) $(-2,5)^9 < 2,5^8$ j) $125^2 = 25^3$

Exercice 6.6 Complète :

a) $7^3 \cdot 7^2 = 7^5 = 16807$

b) $10^5 \cdot 10^2 = 10^7 = 10'000'000$

c) $(-8)^2 \cdot (-8)^2 = (-8)^4 = 4096$

d) $30^2 \cdot 30 = 30^3 = 27'000$

e) $0,6 \cdot 0,6^3 = 0,6^4 = 0,1296$

f) $0,5 \cdot 0,5^3 = 0,5^4 = 0,0625$

g)

Exercice 6.7 Pour chacune des questions suivantes, entoure la bonne réponse :

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$10^{-3} =$	0,001	- 3000	-1000
$\frac{1}{10^9} =$	10^9	0,0000000001	10^{-9}
$10^1 \cdot 10^{-2} =$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$[(-10)^3]^2$	-10^5	-10^6	10^6
$(3^2)^3 =$	3^5	3^6	3^8
$5 \cdot 10^{-2} =$	- 500	- 2500	0,05
$(2 + 5)^2 =$	29	49	14

Exercice 6.8 Lorsque c'est possible, donne la réponse sous forme de puissances, sinon effectue :

- a) $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$ b) $2^3 \cdot 5^2 \cdot 2 = 2^4 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$
- c) $5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4$ d) $3^4 \cdot 2^5 = 81 \cdot 32 = 2592$
- e) $6^3 \cdot 5^3 = (6 \cdot 5)^3 = 30^3$ f) $2^4 \cdot 5^3 \cdot 2^5 \cdot 5^6 = 2^9 \cdot 5^9 = 10^9$
- g) $5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2 = 20 \cdot 10^5 =$ h) $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 120^2 = 14400$
- i) $(5 \cdot 3)^2 = 15^2$ j) $45^0 = 1$
- k) $125^3 \cdot 125^0 = 125^3$ l) $(2 \cdot 10)^3 = 20^3$
- m) $2 \cdot 1^0 + 10^3 = 1002$ n) $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$
- o) $5^2 \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75$ p) $5^3 \cdot 2^0 = 5^3 \cdot 1 = 5^3 = 125$
- q) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 =$ r) $7^{-5} \div 7^{-8} = 7^3$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Exercice 6.9 Résous le problème suivant :

a) Quelle est la mesure du côté d'un carré dont l'aire est de 144 dm^2 ?

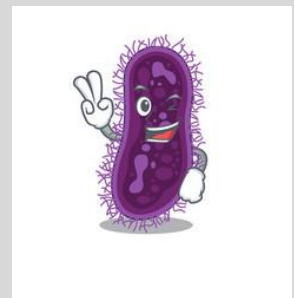
$$\sqrt{144} = 12 \quad 12^2 = 144 \quad \text{le côté mesure } 12 \text{ dm}$$

b) Quelle est l'aire d'une face d'un cube dont le volume est de 125 cm^3 ?

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \text{l'aire est de } 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

Exercice 6.10 Résous le problème suivant :

Un laboratoire fait des recherches sur une population de Escherichia Coli, une bactérie intestinale appelé aussi colibacille qui compose 80% de notre flore intestinale mais qui peut aussi être responsable d'infections urinaires, de gastro-entérite et de méningites.



On a observé que le nombre de bactérie a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

Par combien le nombre de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ?

n = nombre de bactéries

Au bout d'une heure $n \cdot 3$

Au bout de deux heures $n \cdot 3 \cdot 3 = n \cdot 3^2$

Au bout de 24 heures $n \cdot 3^{24}$

Exercice 6.11 Résous le problème suivant :

Madame Tatum est arrière grand-mère. En effet elle a eu 4 fils qui ont eu chacun 4 garçons qui ont eu, eux-mêmes, 4 garçons.

Quel est le total des arrière-petits-fils ? $4^3 = 64$

Quel est le total de toutes les personnes ? $1 + 4 + 4^2 + 4^3 = 1 + 4 + 16 + 64 = 85$

Exercice 6.12 Résous le problème suivant :

Léa observe à midi, au microscope, une cellule de bambou. Au bout d'une heure, la cellule s'est divisée en deux. On a alors deux cellules. Au bout de deux heures, ces deux cellules se sont divisées en deux. Léa note toutes les heures les résultats de son observation. A quelle heure notera-t-elle, pour la première fois, plus de 200 cellules ?

Une cellule	au bout d'une heure	$2^1 = 2$
2	au bout de deux heures	$2^2 = 4$
4		$2^3 = 8$
		$2^4 = 16$
		$2^5 = 32$
		$2^6 = 64$
		$2^7 = 128$
		$2^8 = 256$

Au bout de 8 heures, 256 cellules

Exercice 6.13 Résous le problème suivant :

Jo Laflèche jubile ! Il a en face de lui un coffre-fort d'un vieux modèle : il n'y a que quatre chiffres sur chacun des huit boutons.



a) Combien de combinaisons différentes peuvent être affichées sur ce coffre ?

b) Jo met dix secondes pour afficher une combinaison. Combien de temps lui faut-il pour les essayer toutes ? Le pourra-t-il en une nuit de huit heures ?

Il n'y a que quatre chiffres sur chacun des huit boutons.

a) 4^8 combinaisons soit 65536 combinaisons possibles

b) $10 \times 65536 = 655360$ secondes

Pour toutes les essayer toutes il lui faudra 655360 secondes

Dans 1 h il y a 3600 secondes $\Rightarrow 655360 : 3600 = 182$ h

Une nuit d'une heure ne lui suffira pas

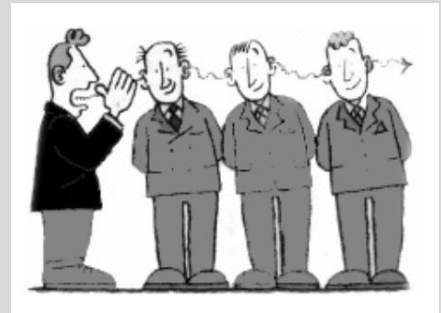
182 : 24 = 7 jours et demi, soit environ 8 jours

Il lui faudra environ 8 jours pour toutes les essayer

Exercice 6.14 Résous le problème suivant :

Monsieur Babille au cours d'un voyage a entendu une rumeur...

Le 1^{er} jour de son retour dans la ville de Racontar il répète cette rumeur à trois personnes.



Le 2^{ème} jour chacune des trois personnes met au courant trois nouvelles personnes. Les jours suivants, la diffusion de la rumeur se poursuit de la même manière dès qu'une personne l'apprend, elle en informe trois autres dès le lendemain.

1. Combien de personnes apprennent la rumeur le 3^{ème} jour ?
2. Écrire le calcul permettant de trouver combien de personnes apprennent la rumeur le 10^{ème} jour. (On ne demande pas d'effectuer le calcul.)
3. Même question pour le 18^{ème} jour.
4. En proposant un codage qui permette d'écrire les calculs ci-dessus de manière condensée, trouver une formulation générale.

Le 1^{er} jour, il répète cette rumeur à trois personnes. 3 personnes sont au courant
Le 2^{ème} jour chacune des trois personnes met au courant trois nouvelles personnes.

$$3^2 = 9$$

Les jours suivants de la même manière dès qu'une personne l'apprend, elle en informe trois autres dès le lendemain.

1- combien de personnes apprennent la rumeur le 3^{ème} jour ?

$$3^3 = 27 \text{ personnes}$$

2-Ecrire le calcul permettant de trouver combien de personnes apprennent la rumeur le 10^{ème} jour ?

$$3^{10} = 59049$$

3-Même question pour le 18^{ème} jour.

$$3^{18} = 387420489$$

4- Pour généraliser tu multiplies par 3 le résultat du jour précédent car chaque personne parle de la rumeur a 3 autres personnes...