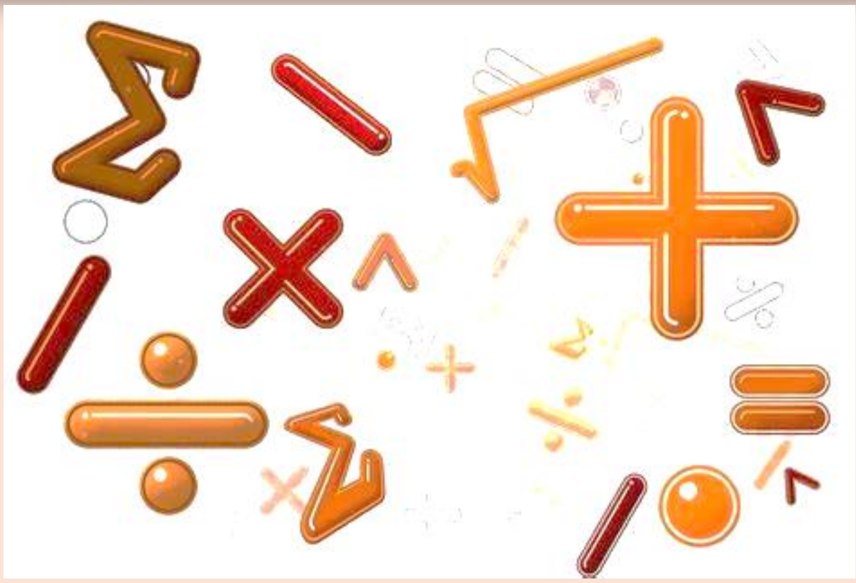
FA- EQUATIONS ET SYSTEMES D'EQUATIONS



Apprentissages visés

- Résolution de problèmes nécessitant le recours à l'algèbre
- Traduction d'une situation par :
  - une équation du premier degré à une inconnue
  - un système d'équations du premier degré à deux inconnues
  - une équation du deuxième degré à une inconnue
- Résolution :
  - d'une équation du premier degré à une inconnue à l'aide des règles d'équivalence
  - d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues à l'aide des méthodes de combinaison linéaire et de substitution
  - d'une équation du deuxième degré à une inconnue par factorisation ou à l'aide de la formule de Viète
- Expression de chacune des variables d'une formule connue en fonction des autres: $d = vt$; $A = \pi r^2$; $A = \frac{bh}{2}$; …

1. Equations du 1er degré

1.1 Résolution d'une équation du 1er degré à une inconnue

La notion d'équation est liée à la notion d'inconnue souvent nommée x. Cependant pour qu'il y ait équation cela ne suffit pas. Il faut avoir en plus une égalité et surtout qu'elle ne soit pas toujours vérifiée.

Définition 1 : On appelle équation à une inconnue, une égalité qui n'est vérifiée que pour certaine(s) valeur(s) d'une quantité x appelée inconnue.

Écrire une équation revient donc à se poser la question : Pour quelle(s) valeur(s) de x l'égalité est-elle vérifiée ?

Exemples :

- $7x + 3$

  Ce n'est pas une équation, mais une expression algébrique. Il n'y a pas d'égalité.
- $2(2x + 3) = 4x + 6$

  Ce n'est pas une équation, mais une égalité qui est toujours vérifiée.
- $2x + 5 = 7$

  C'est une équation car seule la valeur $x = 1$ vérifie l'égalité.

Définition 2 : Une équation du premier degré est une équation où l'inconnue x n'apparaît qu'à la puissance 1.

Exemples

- $2x + 3 = 7x + 5$ est une équation du premier degré.
- $2x^2 + 5x - 7 = 0$ est une équation du second degré.
- $\dfrac{7x + 1}{2x + 3} = 5$ est une équation rationnelle qui peut se ramener au premier degré.

Règles de base

Règle 1 On ne change pas une équation si l'on ajoute ou retranche un même nombre de chaque côté de l'égalité.

Exemple :

Soit l'équation : $2x + 3 = 5$

Ajoutons (– 3) de chaque côté de l'égalité, on a donc :

$2x + 3 - 3 = 5 - 3$

$2x = 2$

Remarques :
1. Dans la pratique on retiendra le raccourci, que tout le monde retient, pour faire passer un terme de l'autre côté de l'égalité, on le change de signe :
de $2x + 3 = 5$ on fait passer le 3 de l'autre côté donc $2x = 5 - 3$
2. Cette règle permet de laisser l'inconnue à gauche de l'égalité. On dit qu'elle permet d'isoler l'inconnue.

Exemple :

Soit l'équation : $5x + 7 = -3 + 2x$

On isole l'inconnue en déplaçant le 7 et le 2x, on obtient : $5x - 2x = -7 - 3$

On regroupe les termes : $3x = -10$

Règle 2 On ne change pas une équation si l'on multiplie ou divise par un même nombre non nul chaque terme de l'égalité.

Exemples :

Soit les équations : $2x = 1$ et $3x = -10$

On divise par 2 la première et par 3 la seconde, on obtient alors :

$x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{10}{3}$

Remarque :
Dans cette deuxième règle, on ne change pas le signe. En effet, on ne dit pas "dans l'équation 2x = 1 le 2 passe de l'autre côté donc il change de signe". On divise tout simplement. Cette deuxième règle permet de déterminer l'inconnue une fois celle-ci isolée.

Exemples de résolution

Voici quelques exemples typiques de résolution d'équation du premier degré. Chaque exemple permet de traiter les principales configurations rencontrées dans ces équations.

Exemple 1 :

$3x - 5 = -x + 2$	
On isole l'inconnue :	$3x + x = 5 + 2$
On regroupe les termes :	$4x = 7$
On calcule l'inconnue **On divise par 4 donc :**	$x = \frac{7}{4}$
On conclut par l'ensemble solution S :	$S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

Exemple 2 : avec des parenthèses

$7(x + 4) - 3(x + 2) = 3(x - 1) - (x + 7)$	
On enlève les parenthèses :	$7x + 28 - 3x - 6 = 3x - 3 - x - 7$
On isole l'inconnue :	$7x - 3x - 3x + x = -28 + 6 - 3 - 7$
On regroupe les termes :	$2x = -32$
On calcule l'inconnue **On divise par 2 :**	$x = -16$
On conclut par l'ensemble solution S :	$S = \{-16\}$

Exemple 3 : avec des fractions

$\frac{2}{3}x + \frac{1}{8} = x \qquad (1)$	
On réduit au même dénominateur :	$\frac{16x+3}{24} = \frac{24x}{24} \qquad (2)$
On multiplie par 24 :	$16x + 3 = 24x \qquad (3)$
On isole l'inconnue :	$16x - 24x = -3$
On regroupe les termes :	$-8x = -3$
On calcule l'inconnue **On divise par (– 8) :** **On simplifie les signes :**	$x = \frac{-3}{-8}$ $x = \frac{3}{8}$
On conclut par l'ensemble solution S :	$S = \left\{\frac{3}{8}\right\}$

Remarque

Dans la pratique, on passe tout de suite de la ligne (1) à la ligne (3) en multipliant par le dénominateur commun, soit :

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{8} = x \qquad (\cdot\, 24)$$

$$16x + 3 = 24x$$

Exemple 4 : égalité entre deux fractions

$\frac{x-3}{5} = \frac{4+5x}{3}$	
On effectue un produit en croix, on a donc :	$3(x-3) = 5(4+5x)$
On enlève les parenthèses et on isole l'inconnue :	$3x - 9 = 20 + 25x$ $3x - 25x = 9 + 20$
On regroupe les termes :	$-22x = 29$
On calcule l'inconnue On divise par (– 22) :	$x = -\frac{29}{22}$
On conclut par l'ensemble solution S :	$S = \left\{\frac{-29}{22}\right\}$

Exemple 5 : des fractions et des parenthèses

$\frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{2} + 2$	
On multiplie par le dénominateur commun, ici 12 :	$4(x+2) - 9(x-2) = 6(-7x+2) + 24$
On enlève les parenthèses :	$4x + 8 - 9x + 18 = -42x + 12 + 24$
On isole l'inconnue :	$-5x + 26 = -42x + 36$
On regroupe les termes :	$37x = 10$
On calcule l'inconnue On divise par 2 :	$x = \frac{10}{37}$
On conclut par l'ensemble solution S :	$S = \left\{\frac{10}{37}\right\}$

Equations particulières

Ce sont des équations qui, après réduction, sont de la forme : 0x = b. Nous sommes alors dans un cas particulier que nous allons traiter à l'aide des deux exemples ci-dessous.

Exemple 1 : une équation impossible

$2(x + 4) + 1 - 5x = 3(1 - x) + 7$	
On enlève les parenthèses :	$2x + 8 + 1 - 5x = 3 - 3x + 7$
On isole l'inconnue :	$2x - 5x + 3x = - 8 - 1 + 3 + 7$
Si on effectue les regroupements des x à gauche, on s'aperçoit qu'il n'y en a plus. On devrait mettre alors 0, mais comme on cherche la valeur de x, par convention on écrira 0x. On obtient donc :	$0x = 1$
Ce qui n'est manifestement jamais vérifiée. L'équation n'a donc aucune solution. On conclut par l'ensemble solution :	$S = \varnothing$ où $\varnothing$ est le symbole de l'ensemble vide

Exemple 2 : une infinité de solutions

$3(2x + 4) - 2x = 14 - 2(1 - 2x)$	
On enlève les parenthèses :	$6x + 12 - 2x = 14 - 2 + 4x$
On isole l'inconnue :	$6x - 2x - 4x = -12 + 14 - 2$
On regroupe les termes :	$0x = 0$
Ce qui, cette fois-ci, est toujours vrai pour toutes les valeurs de x possibles. Toutes les valeurs de l'ensemble des réels conviennent, on conclut donc par :	$S = \mathbb{R}$

Conclusion

On peut résumer les différentes éventualités d'une équation du premier degré dans le tableau suivant :

Règle 3 Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme : $ax = b$

1. Si $a \neq 0$, l'équation admet une unique solution : $x = \frac{b}{a}$ donc $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$

2. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ l'équation n'a pas de solution, donc : $S = \varnothing$

3. Si $a = 0$ et si $b = 0$ tout x réel est solution, donc : $S = \mathbb{R}$

JE M'ENTRAÎNE

Exercice 1.1.1

Détermine l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.

1) $2x + 1 = 5x + x$ $4x = 1$ $x = \frac{1}{4}$ $S = \{\frac{1}{4}\}$

2) $x + 4 = 5x - 8$ $4x = 12$ $x = \frac{12}{4} = 3$ $S = \{3\}$

3) $x - 4 = 2x + 1$ $x = -5$ $S = \{-5\}$

4) $5x - 5 = -4 + 3x$ $2x = 1$ $x = \frac{1}{2}$ $S = \{\frac{1}{2}\}$

5) $5x - 2x = -4x + 3$ $7x = 3$ $x = \frac{3}{7}$ $S = \{\frac{3}{7}\}$

6) $3{,}3x + 0{,}4 = 2{,}3x - 2{,}6$ $x = -3$ $S = \{-3\}$

7) $1{,}1x - 3{,}4 = 2{,}1x - 10{,}4$ $x = 7$ $S = \{7\}$

8) $23{,}2x - 19{,}8 = 10{,}2 + 12{,}8x$ $10{,}4x = 30$ $104x = 300$

$x = \frac{300}{104} = \frac{150}{52} = \frac{75}{26}$ $S = \{\frac{75}{26}\}$

Exercice 1.1.1

Détermine l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.

a) $3x - 11 - 6x - 10 = 7 + 8x - 12 - 7x$

$-4x = 16$

$x = -\frac{16}{4} = -4$ $S = \{-4\}$

b) $4(2x - 1) - 7(4x + 2) = -6(x - 1) + 4$

$8x - 4 - 28x - 14 = -6x + 6 + 4$

$-14x = 28$

$x = -\frac{28}{14} = -2$ $S = \{-2\}$

c) $(2x - 3)(2x + 1) = 4x^2 - x + 7$

$4x^2 + 2x - 6x - 3 = 4x^2 - x + 7$

$-3x = 10$

$x = -\frac{10}{3}$ $S = \{-\frac{10}{3}\}$

d) $6(2x - 1) - 3(7x - 5) = 0$

$12x - 6 - 21x + 15 = 0$

$-9x = -9$

$x = 1$ $S = \{1\}$

e) $-(4 - 9x) + 2x = 5(3 + 2x)$

$-4 + 9x + 2x = 15 + 10x$

$x = 19$ $S = \{19\}$

Exercice 1.1.3

Détermine l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.

a) $(2x-3)(2x+3)=(2x-5)^2$

$4x^2-9=4x^2-20x+25$

$20x=34$

$x=\frac{34}{20}=\frac{17}{10}$ $S=\{\frac{17}{10}\}$

b) $2x-3-5x=1-x+5$

$-2x=9$

$x=-\frac{9}{2}$ $S=\{-\frac{9}{2}\}$

c) $5(3-x)-4(2-x)=3(x+4)-6$

$15-5x-8+4x=3x+12-6$

$-4x=-1$

$x=\frac{1}{4}$ $S=\{\frac{1}{4}\}$

d) $1-(7-2x)-x=5x-2(x-4)$

$1-7+2x-x=5x-2x+8$

$-2x=14$

$x=-\frac{14}{2}=-7$ $S=\{-7\}$

e) $3x-(4x-8)=2x+3-(x-2)$

$3x-4x+8=2x+3-x+2$

$-2x=-3$

$x=\frac{3}{2}$ $S=\{\frac{3}{2}\}$

f) $x-[(3x+2)-2(2-x)]=1-[2x-3(2x-1)]$

$x-[3x+2-4+2x]=1-[2x-6x+3]$

$x-3x-2+4-2x=1-2x+6x-3$

$-8x=-4$

$x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $S=\{\frac{1}{2}\}$

Exercice 1.1.4

Détermine l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.

a) $1 - 2y + 3 - 5y = -y - 1 + 2 - 4y$

$-2y = -3$

$y = \frac{3}{2}$ $S = \{\frac{3}{2}\}$

b) $3x - 4(x + 2) = x + 3 - (7 - 6x)$

$3x - 4x - 8 = x + 3 - 7 + 6x$

$-8x = 4$

$x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ $S = \{-\frac{1}{2}\}$

c) $5z + 1 - z + 3 - 4z + 1 = 0$

$0z = -5$ $S = \varnothing$

d) $7 - (2y - 3) + y = y - 1 - 3(2y + 1)$

$7 - 2y + 3 + y = y - 1 - 6y - 3$

$4y = -14$

$y = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$ $S = \{-\frac{7}{2}\}$

e) $7x - (8 - 2x) = 7x + (2x - 1) \cdot 3$

$7x - 8 + 2x = 7x + 6x - 3$

$-4x = 5$

$x = -\frac{5}{4}$ $S = \{-\frac{5}{4}\}$

f) $6(x - 3) + 2 \cdot 5 = 3(x - 2) + 3x - 2$

$6x - 18 + 10 = 3x - 6 + 3x - 2$

$-8 = -8$ $S = \mathbb{R}$

g) $5x \cdot 2 - 3x \cdot (-2) + 1 = 10$

$10x + 6x + 1 = 10$

$16x = 9$

$x = \frac{9}{16}$ $S = \{\frac{9}{16}\}$

Exercice 1.1.5

Détermine l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.

a) $\frac{5x-3}{4}=2x-1$

$\frac{5x-3}{4}=\frac{4(2x-1)}{4}$ $\quad |\cdot 4$

$5x-3=4(2x-1)$

$5x-3=8x-4 \qquad -3x=-1 \qquad x=\frac{1}{3} \qquad S=\{\frac{1}{3}\}$

b) $\frac{3x+2}{12}=\frac{x-4}{18}$

$\frac{3(3x+2)}{36}=\frac{2(x-4)}{36}$ $\quad |\cdot 36$

$3(3x+2)=2(x-4)$

$9x+6=2x-8$

$7x=-14 \qquad x=-\frac{14}{7}=-2 \qquad S=\{-2\}$

c) $\frac{x}{2}-1=\frac{7x-4}{8}$

$\frac{4x}{8}-\frac{8}{8}=\frac{7x-4}{8}$ $\quad |\cdot 8$

$4x-8=7x-4 \qquad -3x=4 \qquad x=-\frac{4}{3} \qquad S=\{-\frac{4}{3}\}$

d) $\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$

$\frac{5}{6}x-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}x-\frac{3}{6}$ $\quad |\cdot 6$

$5x-2=4x-3 \qquad x=-1 \qquad S=\{-$

e) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}=\frac{5}{9}x-\frac{1}{6}$

$\frac{24}{36}x-\frac{9}{36}=\frac{20}{36}x-\frac{6}{36}$ $\quad |\cdot 36$

$24x-9=20x-6 \qquad 4x=3 \qquad x=\frac{3}{4} \qquad S=\{\frac{3}{4}\}$

f) $\frac{4}{3}x-1=\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}$

$\frac{8}{6}x-\frac{6}{6}=\frac{1}{6}x+\frac{3}{6}$

$8x-6=x+3 \qquad 7x=9 \qquad x=\frac{9}{7} \qquad S=\{\frac{9}{7}\}$

Exercice 1.1.6

Détermine l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.

a) $3(x+3)+3x-2=2(6x-2)$

$3x+9+3x-2=12x-4$

$-6x=-11$ $\quad x=\dfrac{11}{6}$ $\quad S=\{\dfrac{11}{6}\}$

b) $(2w+1)-3(5w+1)=2(w-4)-(3w-6)$

$2w+1-15w-3=2w-8-3w+6$

$-12w=0$ $\quad w=0$ $\quad S=\{0\}$

c) $4-[-2x-(5+4x)]=5x-[3-2(4x-1)]$

$4-[-2x-5-4x]=5x-[3-8x+2]$

$4+2x+5+4x=5x-3+8x-2$

$-7x=-14$ $\quad x=2$ $\quad S=\{2\}$

d) $\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{3x-2}{6}=\dfrac{6x-2}{3}$

$\dfrac{3(x+3)}{6}+\dfrac{3x-2}{6}=\dfrac{2(6x-2)}{6}$ $\quad |\cdot 6$

$3(x+3)+3x-2=2(6x-2)$

$3x+9+3x-2=12x-4$

$-6x=-11$ $\quad x=\dfrac{11}{6}$ $\quad S=\{\dfrac{11}{6}\}$

e) $\dfrac{3x+1}{4}-\dfrac{5x-7}{3}=\dfrac{2x+5}{12}$

$\dfrac{3(3x+1)}{12}-\dfrac{4(5x-7)}{12}=\dfrac{2x+5}{12}$ $\quad |\cdot 12$

$3(3x+1)-4(5x-7)=2x+5$

$9x+3-20x+28=2x+5$

$-13x=-26$ $\quad x=\dfrac{26}{13}=2$ $\quad S=\{2\}$

Exercice 1.1.7

Détermine l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.

1) $\frac{x+3}{5} - \frac{3x-2}{6} = \frac{6x-7}{10}$

$\frac{6(x+3)}{30} - \frac{5(3x+2)}{30} = \frac{3(6x-7)}{30} \qquad |\cdot 30$

$6(x+3) - 5(3x+2) = 3(6x-7)$

$6x + 18 - 15x + 10 = 18x - 21$

$-27x = -49 \qquad x = \frac{49}{27} \qquad S = \{\frac{49}{27}\}$

2) $\frac{x+3}{2} - \frac{6x+7}{8} = \frac{9-3x}{5} - \frac{1}{8}$

$\frac{20(x+3)}{40} - \frac{5(6x+7)}{40} = \frac{8(9-3x)}{40} - \frac{5}{40} \qquad |\cdot 40$

$20(x+3) - 5(6x+7) = 8(9-3x) - 5$

$20x + 60 - 30x - 35 = 72 - 24x - 5$

$14x = 42 \qquad x = \frac{42}{14} = \frac{6}{2} = 3 \qquad S = \{3\}$

3) $3x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{5} + 6\right) = 25 + \frac{3}{2}x$

$3x - \frac{x}{10} - 3 = 25 + \frac{3}{2}x$

$\frac{30x}{10} - \frac{x}{10} - \frac{30}{10} = \frac{250}{10} + \frac{15x}{10} \qquad |\cdot 10$

$30x - x - 30 = 250 + 15x$

$14x = 280 \qquad x = \frac{280}{14} = 20 \qquad S = \{20\}$

4) $x - 3\left(\frac{1}{2}x - \frac{x-2}{4}\right) = \frac{2+4x}{3}$

$x - \frac{3}{2}x + \frac{3(x-2)}{4} = \frac{2+4x}{3}$

$\frac{12x}{12} - \frac{18x}{12} + \frac{9(x-2)}{12} = \frac{4(2+4x)}{12} \qquad |\cdot 12$

$12x - 18x + 9(x-2) = 4(2+4x)$

$12x - 18x + 9x - 18 = 8 + 16x$

$-13x = 26 \qquad x = -\frac{26}{13} = -2 \qquad S = \{-2\}$