

FA Equations et systèmes d'équations

Exercice 1

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et donne l'ensemble des solutions sous forme exacte (valeur exacte).

a) $\frac{5x-5}{4} + \frac{6x+10}{2} = \frac{10x-1}{6}$

$$3(5x-5) + 6(6x+10) = 2(10x-1)$$

$$15x-15+36x+60=20x-2$$

$$51x+45=20x-2$$

$$51x-20x=-2-45$$

$$31x=-47$$

$$x = -\frac{47}{31}$$

$$S = \left\{-\frac{47}{31}\right\}$$

b) $3x^2 - x = 4$

$$3x^2 - x - 4 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{6} \quad x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = -1$$

$$S = \left\{-1; \frac{4}{3}\right\}$$

c) $4(3x+5) = 2(6x-5)$

$$12x+20=12-10$$

$$20=-10$$

$$S = \emptyset$$

d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$

$$3x+2x=60$$

$$5x=60$$

$$x=12$$

$$S = \{12\}$$

e) $3(x-1) + (x-1)(x-2) + 2 = 2x$

$$3x-3+x^2-2x-x+2+2=2x$$

$$1+x^2=2x$$

$$x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0 \quad x=1$$

$$S = \{1\}$$

f) $4x^2 = 1$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$$

g) $x(x^2 - 5x + 4) = 0$

$$x(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 4$$

$$S = \{0; 1; 4\}$$

h) $2x^2 - 8x - 4 = 3x - x^2$

$$3x^2 - 11x - 4 = 0$$

$$\Delta = 121 + 48 = 169$$

$$x = \frac{11 \pm 13}{6} \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -\frac{1}{3} \quad S = \left\{-\frac{1}{3}; 4\right\}$$

i) $8x^2 - 12x = 0$

$$x(8x - 12) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$$

j) $\frac{3}{5} + \frac{x}{4} - 1 = \frac{x+1}{10}$

$$\frac{12}{20} + \frac{5x}{20} - \frac{20}{20} = \frac{2x+2}{20}$$

$$12 + 5x - 20 = 2x + 2$$

$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$S = \left\{\frac{10}{3}\right\}$$

Exercice 2

Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode de ton choix

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -5x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x - 10y = 30 \\ -15x + 18y = 30 \end{cases}$$

$$8y = 60$$

$$y = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

$$\begin{cases} 9x - 6y = 18 \\ -5x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

$$S = \left\{ \left(7 ; \frac{15}{2} \right) \right\}$$

$$b) \begin{cases} 2y = 3(x-5) \\ 5x - 11y = -2x - 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y = -15 \\ 7x - 11y = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -21x + 14y = -105 \\ 21x - 33y = -66 \end{cases}$$

$$-19y = -171$$

$$y = 9$$

$$-3x = -15 - 18$$

$$-3x = -33$$

$$x = 11$$

$$S = \{(11 ; 9)\}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x-1}{8} + \frac{y-2}{5} = 2 \\ 2x - 21 - \frac{5-2y}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x-1) + 8(y-2) = 80 \\ 6x - 63 - 5 + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 5 + 8y - 16 = 80 \\ 6x + 2y = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 8y = 101 \\ 6x + 2y = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 8y = 101 \\ 24x + 8y = 272 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -19x &= -171 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8y &= 101 - 45 \\ 8y &= 56 \quad y = 7 \end{aligned}$$

$$S = \{(9 ; 7)\}$$

$$d) \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{5y}{4} = 15 \\ \frac{6x}{5} + \frac{3y}{2} = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 5y = 60 \\ 12x + 15y = 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 10y = 120 \\ 12x + 15y = 150 \end{cases}$$

$$-5y = -30$$

$$y = 6$$

$$6x = 60 - 30$$

$$6x = 30$$

$$x = 5$$

$$S = \{(5 ; 6)\}$$

Problème 1 (résolution algébrique)

Bart et Lisa sont frère et soeur. Il y a 6 ans, Bart avait deux fois l'âge de Lisa.

Dans 5 ans, ils auront 40 ans à eux deux.

a) Quel est l'âge de Bart ?

b) Quel sera l'âge de Lisa quand ils auront ensemble 100 ans ?

$x = \text{l'âge de Bart}$

$y = \text{l'âge de Lisa}$

$$\begin{cases} x - 6 = 2(y - 6) \\ x + 5 + y + 5 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -6 \\ x + y = 30 \end{cases}$$

$$3y = 36$$

$$y = 12$$

$$x = 30 - 12 = 18$$

Bart a 18 ans

$$12 + x + 18 + x = 100$$

$$2x = 70$$

$$x = 35 \text{ (dans 35 ans)}$$

$$y + 35 = 12 + 35 = 47 \text{ ans}$$

Lisa aura 47 ans

Problème 2 (résolution algébrique)

On a un carré. On augmente la longueur du côté de 6 cm. On obtient un nouveau carré dont l'aire mesure 84 cm^2 de plus que l'aire du carré précédent. Quelle est la longueur du côté du premier carré ?

$x = \text{le côté initial}$

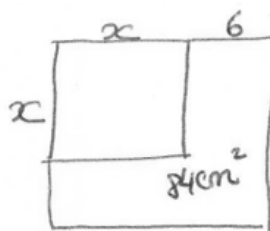
$$x^2 + 84 = (x + 6)^2$$

$$x^2 + 84 = x^2 + 12x + 36$$

$$48 = 12x$$

$$x = 4$$

Le côté initial mesure 4 cm



Problème 3 (résolution algébrique)

Dans un coffre-fort, il y a des billets de 50 frs et des billets de 100 frs, soit au total 144 billets. Sachant que ce coffre-fort renferme 11'600 frs, calculer le nombre de billets de chaque sorte.

x = le nombre de billets de 50 frs

y = le nombre de billets de 100 frs

$$\begin{cases} x + y = 144 \\ 50x + 100y = 11600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 144 - y \\ 50(144 - y) + 100y = 11600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 144 - y \\ 7200 - 50y + 100y = 11600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 144 - y \\ 50y = 4400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 144 - y \\ y = 88 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 144 - 88 = 56 \\ y = 88 \end{cases}$$

Il y a 56 billets de 50 frs et 88 billets de 100 frs

Problème 4 (résolution algébrique)

Un livre comporte 320 pages. Aujourd'hui, Paul a lu 20 pages de plus qu'avant-hier, 5 pages de moins qu'hier, et il lui reste encore 50 pages à lire pour demain.

Combien Paul a-t-il lu de pages aujourd'hui ?

Nombre de pages lues aujourd'hui = $x + 20$

Nombre de pages lues hier = $x + 25$

Nombre de pages lues avant-hier = x

$$x + 20 + x + 25 + x + 50 = 320$$

$$3x + 95 = 320$$

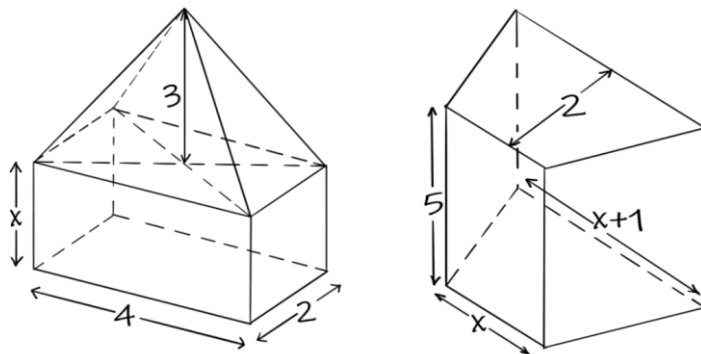
$$3x = 225$$

$$x = 75$$

Il a lu 95 pages aujourd'hui

Problème 5 (résolution algébrique)

Détermine x pour que les deux solides ci-contre aient le même volume.



$$4 \cdot 2 \cdot x + \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{3} = \frac{x + x + 1}{2} \cdot 2 \cdot 5$$

$$8x + 8 = \frac{2x + 1}{2} \cdot 2 \cdot 5$$

$$8x + 8 = (2x + 1) 5$$

$$8x = 10x + 5 - 8$$

$$- 2x = - 3$$

$$x = 1,5$$

x mesure 1,5 cm

Problème 6 (résolution algébrique)

Un convoi est composé d'une locomotive suivie de plusieurs wagons. La locomotive mesure 22 mètres, un wagon mesure 17 mètres, la distance entre la locomotive et le premier wagon est de 1,5 mètres et la distance entre 2 wagons est de 1 mètre. Combien le convoi compte-t-il de wagons sachant qu'il mesure 364,5 mètres (de l'avant de la locomotive à l'arrière du dernier wagon) ?

x = nombre de wagons

$$22 + 1,5 + 17x + 1(x - 1) = 364,5$$

$$23,5 + 18x - 11 = 364,5$$

$$18x = 342$$

$$x = 19$$

Il y a 19 wagons

Problème 7 (résolution algébrique)

On colle une photographie rectangulaire sur une feuille rectangulaire de manière à ce que les côtés soient parallèles.

- La largeur de la feuille vaut le triple de la hauteur de la photo
- La hauteur de la feuille vaut le double de la largeur de la photo
- La différence entre les largeurs vaut 24 et la différence entre les hauteurs vaut 27.

Quelle est l'aire de la partie de la feuille qui n'est pas recouverte par la photo ?

x = la hauteur de la photo

y = la largeur de la photo

$$\begin{cases} 3x - y = 24 \\ 2y - x = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 24 \\ -3x + 6y = 81 \end{cases}$$

$$5y = 105$$

$$y = 21$$

$$x = 42 - 27 = 15$$

$$42 \cdot 15 - 15 \cdot 21 = 1890 - 315 = 1575 \text{ cm}^2$$

L'aire de la partie de la feuille qui n'est pas recouverte par la photo est de 1575 cm²

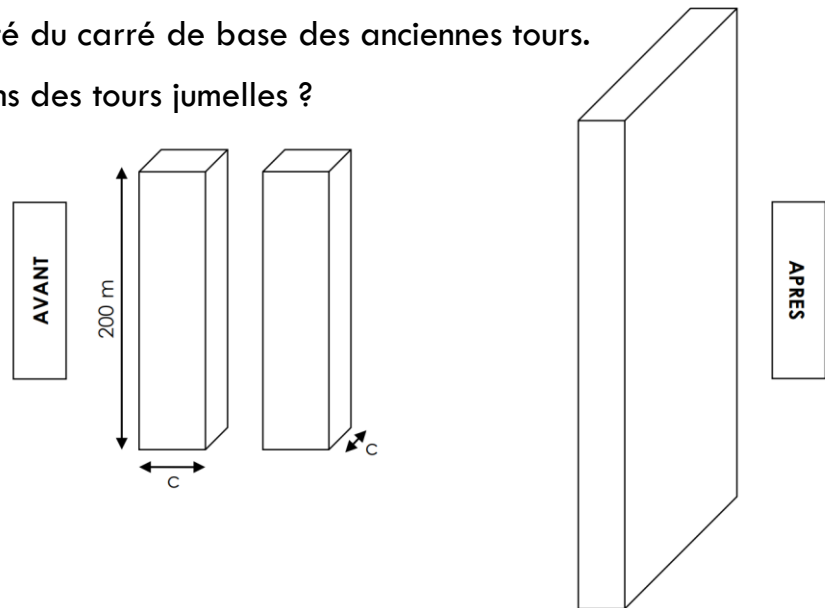
Problème 8 (résolution algébrique)

Un architecte est chargé de remplacer 2 tours jumelles de base(s) carrée(s) et de 200 mètres de hauteur par un seul édifice parallélépipédique comme le montre le croquis.

Le nouveau gratte-ciel sera deux fois plus haut que les anciennes tours et son volume augmenté de la moitié du volume total des deux tours.

Sa base a une longueur qui vaut le triple de sa largeur et une largeur de 10 mètres plus courte que le côté du carré de base des anciennes tours.

Quelles étaient les dimensions des tours jumelles ?



$$V = 2 c^2 \cdot 200 = 400 c^2$$

$$\times 1,5 \rightarrow 600 c^2$$

$$V = (c - 10) \cdot 3 \cdot (c - 10) \cdot 400$$

$$= 1200 (c^2 - 20c + 100)$$

$$= 1200 c^2 - 24000c + 120000$$

$$600 c^2 = 1200 c^2 - 24000c + 120000$$

$$0 = 600 c^2 - 24000c + 120000$$

$$0 = 6c^2 - 240c + 1200$$

$$0 = c^2 - 40c + 200$$

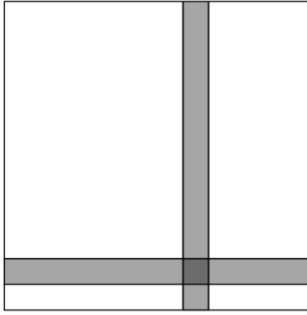
$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200 = 800$$

$$x = \frac{40 \pm 20\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = 20 + 10\sqrt{2} = 34,14 \text{ m}$$

$$x_2 = 20 - 10\sqrt{2} = 5,86 < 10 \text{ m}, \text{ réponse à éliminer}$$

Les dimensions des tours jumelles $34,14 \times 34,14 \times 200 \text{ m}$

Problème 9 (résolution algébrique)

Un jardin public a la forme d'un carré de 8 mètres de côté. Il est traversé par 2 allées de même largeur perpendiculaires entre elles (voir schéma). Détermine cette largeur sachant que pour recouvrir ces allées, on a utilisé la totalité du chargement d'un camion de gravier permettant de recouvrir 15 m^2 de terrain.

x = la largeur de l'allée

$$8x + 8x - x^2 = 16x - x^2 = 15$$

$$x^2 - 16x + 15 = 0$$

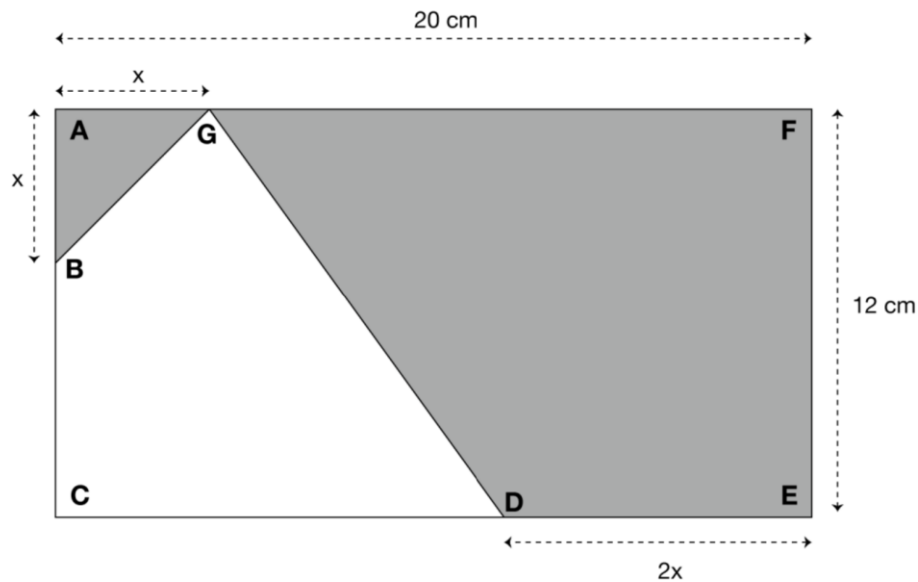
$$(x - 1)(x - 15) = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = 15$$

L'allée fait 1 m de large car la dimension de 15 m n'est pas possible

Problème 10 (résolution algébrique)

On fait varier les deux points « D » et « G » le long des segments CE et AF. Pour quelle(s) valeur(s) de x , l'aire grise vaut les $\frac{11}{20}$ de l'aire du rectangle ACEF ?



$$\text{Aire du rectangle } 20 \cdot 12 = 240 \quad \frac{11}{20} \cdot 240 = 132$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(2x + 20 - x) \cdot 12}{2} = 132$$

$$x^2 + (x + 20) \cdot 12 = 264$$

$$x^2 + 12x + 240 = 264$$

$$x^2 + 12x - 24 = 0$$

$$\Delta = 144 + 96 = 240$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{240}}{2}$$

$$x_1 = 1,75 \quad x_2 = -13,75 \quad \text{solution superflue}$$

Pour $x = 1,75$ l'aire grise vaut les $\frac{11}{20}$ de l'aire du rectangle ACEF

Problème 11 (résolution algébrique)

Dans une réserve africaine, on compte 3 espèces de grands mammifères (lions, girafes et éléphants).

Les girafes sont trois fois plus nombreuses que les lions. Au total, on dénombre 564 grands mammifères.

Pour prendre soin des animaux, la réserve reçoit chaque année 100 frs par lion, 50 frs par girafe et 150 frs par éléphant. Elle a ainsi reçu 49'600 frs cette année.

Combien y a-t-il de lions, de girafes et d'éléphants dans cette réserve ?

x = nombre de lions

$3x$ = nombre de girafes

y = nombre d'éléphants

$$\begin{cases} x + 3x + y = 564 \\ 100x + 50 \cdot 3x + 150y = 49600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 564 \\ 250x + 150y = 49600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 564 - 4x \\ 250x + 150(564 - 4x) = 49600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 564 - 4x \\ 250x + 84600 - 600x = 49600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 564 - 4x \\ -350x = -35000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 564 - 4x \\ x = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 100 \\ y = 564 - 400 = 164 \end{cases}$$

Dans la réserve il y a 100 lions, 300 girafes et 164 éléphants

Problème 12 (résolution algébrique)

Une boutique au centre-ville de Lausanne vend uniquement des chemises et des pantalons. Elle a actuellement en stock un total de 1378 vêtements. Le prix d'une chemise est la moitié de celui d'un pantalon, et un pantalon coûte 130 CHF. Si cette boutique vendait la totalité de son stock actuel, elle encaisserait un total de 158'015 CHF.

Quel pourcentage de ce montant total représente la vente des pantalons ?

x = nombre de chemises

y = nombre de pantalons

Prix chemise = 65 frs

Prix pantalon = 130 frs

$$\begin{cases} x + y = 1378 \\ 65x + 130y = 158015 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1378 - y \\ 65(1378 - y) + 130y = 158015 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1378 - y \\ 89570 - 65y + 130y = 158015 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1378 - y \\ 89570 + 65y = 158015 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1378 - y \\ 65y = 68445 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1378 - y \\ y = 1053 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1053 \\ x = 1378 - 1053 = 325 \end{cases}$$

$$y = \frac{1053 \cdot 130}{158015} = 86,63\%$$

La vente des pantalons représente 86,63% du montant total